

ب) فرض کنید α, β دو عدد مختلط باشند بطوری که $\alpha\beta = 13i$, $\alpha\bar{\beta} = 5(1+i)$, $\alpha\beta = 5(1+i)$, $\alpha\bar{\beta} = 13i$ در این صورت مقدار

$$\alpha^3 + \beta^3$$

۲-فرض کنید f تابعی است که در هر فاصله کراندار انتگرال پذیر است. بعلاوه فرض کنید که f در معادله زیر صدق کند

$$\int_0^x f(t)dt = (x-1)f(x) + 1$$

الف) نشان دهید که اگر $x \neq 1$, آنگاه f پیوسته است. ب) نشان دهید که اگر $x \neq 1$, آنگاه f مشتق پذیر است.

چ) تابع $f(x)$ را با مشتقگیری از طرفین معادله بالا محاسبه کنید. (۲ نمره)

$$3-انتگرالهای (الف) \int \frac{x^3 \cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (z) \quad (b) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad (c) \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

۴-درون مخروطی کروی شکل به شعاع ۱۰ متر، تا ارتفاع ۱۲ متری آب ریخته ایم. حجم آب موجود را محاسبه کنید. (۱ نمره)

$$5-\text{طول} x^3 = y^2 = x^3 \text{ را} \text{ بزیر} \text{ می شود، حساب کنید. (۱ نمره)}$$

$$6-\text{فرض کنید } f(x) = \frac{1}{2} x \coth(\frac{1}{2}x) \quad \text{(الف)} \text{ نشان دهید } f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2}x \quad \text{(ب)} \text{ توضیح دهید که چرا انتگرال}$$

$$7-\text{الف) فرض کنید } 0 < p, \text{ نشان دهید } \int_{-1}^1 \frac{x^p}{e^{x-1}} dx = -\frac{1}{3} \quad (\text{۱ نمره})$$

$$8-\text{در سری هرگاه } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ می توان از آزمون رابه کمک گرفت. قرار می دهیم } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = L \quad \text{در سری هرگاه } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ می توان از آزمون رابه کمک گرفت. قرار می دهیم } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$$9-\text{هرگاه } a_n > 1 \text{ آنگاه سری همگرا و هرگاه } a_n < 1 \text{ آنگاه سری همگراست. در سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ که در آن } a_n = e^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})} \text{ به کمک آزمون رابه بر حسب مقادیر مختلف } e \neq a \text{ در همگرایی و واگرایی آن بحث کنید. (۲/۵ نمره)}$$

$$10-\text{الف) نشان دهید که سری } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ همگرایست. ب) مقدار سری قسمت الف را حساب کنید. (۲ نمره)}$$

$$11-\text{الف) نشان دهید سری } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} \text{ همگرایست. ب) نشان دهید } \int_0^1 xe^{yx} dx \geq 0 \text{ برای هر عدد حقیقی } y. \quad (\text{۱/۵ نمره})$$