

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی



IRmath

مدت امتحان: ۳ ساعت

ریاضیات مهندسی

ساعت ۲ بعد از ظهر ۲۴ فروردین ۱۳۹۶

امتحان میان ترم گروه‌های ۵ الی ۱۲

دانلود پاسخنامه از سایت ریاضیات ایران

– در پاسخ تمام سوالات آزمون، توضیحات کامل و رسا باشد و محاسبات لازم صورت گیرد.
– در صورت استفاده از قضیه پیکارد باید آن را بصورت کامل و روشن ثابت کنید، در غیر این صورت راه حل شما که در آن از این قضیه استفاده شده است، پذیرفته نخواهد بود.

سوال ۱. الف. جوابهای معادله زیر را به شکل قطبی و دکارتی بدست آورید. (۱۰ نمره)

$$z^4 + 2z^2 + 2 = 0$$

ب. چرا برابری پایین معتبر نیست؟ دلیل خود را روشن و رسا بیان کنید. (۱۰ نمره)

$$2 = ((-8)^2)^{\frac{1}{2}} = (-8)^{\frac{1}{2}} = -2$$

سوال ۲. تعریف می‌کنیم $\mathbb{H}^+ := \{x + iy = z \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ و $\overline{\mathbb{H}^+} = \{x + iy = z \in \mathbb{C} \mid y < 0\}$. اگر تابع $f: \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی باشد، آیا تابع پایین نیز تحلیلی است؟ چرا؟ (۱۰ نمره)

$$g: \mathbb{H}^+ \cup \overline{\mathbb{H}^+} \rightarrow \mathbb{C} \\ g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \mathbb{H}^+ \\ f(\bar{z}) & z \in \overline{\mathbb{H}^+} \end{cases}$$

سوال ۳. الف. نگاشتی همدیس معرفی کنید که ناحیه A در پایین را به ناحیه $B - \{p\}$ در پایین برای یک $p \in \mathbb{C}$ دلخواه با شرط $|p| < 1$ به صورت یک به یک و پیرشا تصویر کند. (۱۰ نمره)

$$A := \mathbb{C} - \{1 + i + e^{it} \in \mathbb{C} \mid t \in [-\pi, 0]\}$$

$$B - \{p\} := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1, w \neq p\}$$

ب. تابع تحلیلی $f: \mathbb{C} \rightarrow A$ که در آن $f(i) = 0$ را در نظر بگیرید. برد تابع f را با ذکر دلیل بیابید. (۱۰ نمره)

راهنمایی: توجه کنید که خم γ تنها یک دور به دور مبدأ نچرخیده است.



$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z) dz}{z^2(z^2 + 1) \cosh(z)}$$

$$\begin{cases} \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \sin(2\pi t))e^{\lambda\pi it} \end{cases}$$

سوال ۵. انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید. (۱۰ نمره) (مقدار اصلی آن مورد نظر است)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$$

سوال ۶. سری لوران تابع زیر را حول $z_0 = 0$ بیابید. توجه کنید که باید ضرایب سری لوران یعنی a_n بر حسب n بیان گردد. (۱۰ نمره)

$$f(z) = e^{2z} \cos z \cosh z$$

سوال ۷. فرض کنید $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی همساز باشد و $\nabla u = (u_x, u_y) \neq (0, 0)$. آیا سطوح تراز این تابع یعنی

$$u^{-1}(a) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x, y) = a\}$$

می‌تواند خمی بسته در صفحه باشد؟ چرا؟ (۱۰ نمره)

راهنمایی: لازم به ذکر است که در این حالت سطح تراز همیشه تصویر خمی مشتق‌پذیر با مشتق ناصفر مانند γ خواهد بود و برای چنین خمی، صفحه منهای خم، به دو مولفه همبند باز در صفحه افراز می‌شود که مرز هر دو مولفه، تصویر همان خم γ است.

سوال ۸. آیا تابعی پیوسته مانند

$$u: \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, z \neq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

وجود دارد که در تمام نقاط داخل قرص واحد یعنی $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ همساز بوده و

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = 1, z \neq 1 \quad u(z) = 0$$

ولی ثابت نباشد؟ اگر وجود دارد مثال بزنید و اگر وجود ندارد دلیل آن را بیان کنید. (۱۰ نمره)

راهنمایی: از نگاشت موبیوسی استفاده کنید که قرص واحد را به نیم صفحه بالایی می‌برد.

موفق و پیروز و سربلند باشید