

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی ۱

سوال ۱

تابع $f(x) = \sin(x) - x \cos(x+1)$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) با استفاده از مقدار معلوم $f(x)$ در نقطه 0، مقدار تقریبی $f(-\frac{1}{8})$ را با استفاده از تقریب خطی پیدا کنید. (نیازی به استفاده از ماشین حساب برای محاسبه اعشاری عبارت به دست آمده به وسیله روش تقریب خطی نیست، صرفاً عبارت به دست آمده توسط تقریب خطی را بنویسید).

(ب) نشان دهید قدر مطلق خطای محاسبه قسمت (الف) کمتر یا مساوی $\frac{1}{32}$ است.

(ج) نشان دهید $f(-\frac{1}{8})$ منفی است. (استفاده از ماشین حساب مجاز نیست. راهنمایی: در صورت نیاز می‌توانید از قسمت (ب) استفاده کنید و همچنین نامساوی $\cos(1) < \frac{3}{4}$ را با مقایسه زاویه 1 بر حسب رادیان، با زوایای آشنایی که کسینوس آنها را می‌دانید ثابت کنید).

(د) نشان دهید نقطه c در بازه $[-1, 0]$ هست به طوری که $f(c) = 0$.

(ه) نشان دهید نقطه d در بازه $[-1, 0]$ هست به طوری که $f'(d) = 0$.

سوال ۲

می‌خواهیم یک لیوان استوانه‌ای شکل از مقوا بسازیم که به اندازه حجم معینی ظرفیت داشته باشد و مقدار مقوای به کار رفته در آن کمترین مقدار باشد. نسبت ارتفاع لیوان به قطر کف آن چقدر باید باشد؟
توضیح: در این سوال لیوان، مثل یک لیوان معمولی سر باز است.

سوال ۳

تابع $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست آورید.

(ب) به ازای چه x هایی $f(x)$ ماکسیمم موضعی می‌شود؟ (استفاده از ماشین حساب یا نرم افزارهای محاسباتی به جهت محاسبه اعشاری یک عبارت برای تعیین مثبت یا منفی بودن آن در آزمون مشتق دوم مجاز است).

سوال ۴

(الف) با استفاده از بسط مکلاورن انتگرال $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$ را به صورت یک سری توانی بیان کنید. (شکل کلی ضرایب آن را بنویسید و حداقل چهار جمله اول آن را به دست آورید).

(ب) مقدار تقریبی این انتگرال برای $x = 1$ را تا 3 رقم اعشار حساب کنید.