

به نام خدا

آزمون نهایی ریاضی عمومی ۱

وقت: ۳ ساعت

تنها به پاسخ‌هایی نمره کامل تعلق می‌گیرد که دلایل و توضیحات بطور کامل ذکر شده باشد.

سوال اول. (۵ نمره)

اگر وارون تابع f توسط ضابطه $\frac{x-1}{x+1}$ داده شده باشد و وارون تابع g توسط ضابطه $\frac{2x-1}{x-1}$ داده شده باشد، دامنه و برد تابعهای f و g را مشخص کنید و سپس وارون تابع $f \circ g$ که از ترکیب توابع f و g حاصل شده است را به دست آورید.

سوال دوم. (۱۰ نمره)

مطلوب است محاسبه دو حد زیر

۱.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^3 + 4} - 2}{t^3}$$

۲.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$$

سوال سوم. (۵ نمره)

مطلوب است محاسبه y'' در تابع ضمنی $xy + e^y = e$ وقتی $x = 0$ است.

سوال چهارم. (۱۰ نمره)

به داخل مخزن آبی به شکل یک مخروط وارونه با مقطع دایره‌ای به شعاع ۳ متر و ارتفاع ۶ متر بطور پیوسته آب با نرخ ۴ مترمکعب در دقیقه پمپ می‌شود. وقتی ارتفاع آب ۵ متر است نرخ تغییر ارتفاع آب بر حسب متربر دقیقه چقدر است؟

مطلوب است محاسبه انتگرال‌های نامعین زیر

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$

۱.

$$\int \arctan(x) dx$$

۲.

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$$

۳.

$$\int \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$$

۴.

سوال ششم. (۹ نمره)

مقدار انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx.$$

سوال هفتم. (۱۵ نمره)

در مورد همگرایی و یا واگرایی هر کدام از سری‌های زیر با ذکر دلیل تصمیم بگیرید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 5}$$

۱.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n - 1}{\sqrt{n^4 + 2}}$$

۲.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n}$$

۳.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

۵.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{5n+1} \right)^n.$$

سوال هشتم. (۱۰ نمره)

مطلوب است محاسبه شعاع همگرایی و دامنه همگرایی سری توانی زیر

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}} (x-5)^n.$$

سوال نهم. (۵ نمره)

با استفاده از مشتق گیری از سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ مقدار دقیق سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

سوال دهم. (۱۵ نمره)

سری مک لوران تابع $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ را پیدا کنید. شعاع همگرایی آنرا محاسبه کنید. با تخمین خطا با استفاده از نامساوی تیلور نشان دهید داخل شعاع همگرایی این سری با $f(x)$ برابر است.

موفق باشید.