Subject: 1

دنباله و سری‌های عددی

۱ـ دنباله‌ها

تعریف. فرض کنید X یک فضای متریک است، هر تابع از $\mathbb{N}$ (اعداد طبیعی) به X را یک دنباله گوییم

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow X$$
$$n \longmapsto f(n)$$

دنباله f را معمولاً با $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نمایش می‌دهیم $x_n = f(n)$

بنابراین به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم: $x_1=f(1), x_2=f(2), \dots, x_n=f(n)$

در نتیجه $\{x_1, x_2, \dots\}$ را برد دنباله $f(n) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ می‌نامیم.

توجه: اگر $X=\mathbb{R}$ باشد، دنباله را دنباله حقیقی و اگر $X=\mathbb{C}$ باشد، دنباله را دنباله مختلط نامیم:

$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ دنباله حقیقی

$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{C}$ دنباله مختلط

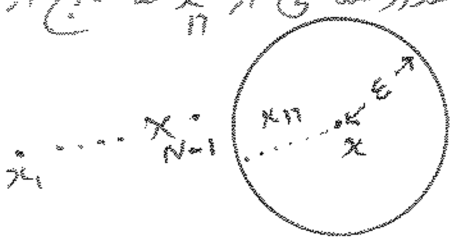
همگرایی دنباله‌ها

تعریف. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد، $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X است ($x_n\in X$)، گوییم $\{x_n\}$ به نقطه $x\in X$ همگراست، هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N>0 : \forall n\geq N \Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$$

یعنی اینکه $x_n\in N_\varepsilon(x)$

به عبارت دیگر حداکثر تعداد متناهی از x_n ها خارج از هر همسایگی x قرار گیرند



Subject: ۲

قرارداد : اگر $\{x_n\}$ به x میل کند، می‌نویسیم :

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{یا} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

هر دنباله‌ای که همگرا نباشد به آن دنباله واگرا گویند.

مثال . فرض کنیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. نشان دهید $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n-1}{a_n+1} = 0$

حل : قرار می‌دهیم $b_n = \frac{a_n-1}{a_n+1}$ آنگاه $a_n = \frac{1+b_n}{1-b_n}$ چون $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \to 0$

بنابراین $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1+\lim b_n}{1-\lim b_n} = \frac{1+0}{1-0} = 1$

مثال . فرض کنیم $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{2n}{n+4\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثابت کنید $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$

حل :

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N>0 : \forall n\geqslant N \Rightarrow |x_n-2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2n}{n+4\sqrt{n}}-2\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{8\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+4)} = \frac{8}{\sqrt{n}+4} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \left(\frac{8}{\varepsilon}-4\right)^2$$

به عبارت دیگر هرگاه $N \geqslant \left(\frac{8}{\varepsilon}-4\right)^2$ باشد. آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$

Subject: ۳

مثال. اگر $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ مطلوبست محاسبه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

حل:

$$\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow n^2+1\leq n^2+n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

بنابراین (I) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n$

و همچنین $u_n\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ یعنی (II) $u_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$$\text{(I)},\text{(II)} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\leq u_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=1$$

دنباله کراندار

تعریف. دنباله $\{x_n\}$ را در فضای متریک (X,d) کراندار گوییم هرگاه برد آن یعنی مجموعه $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ کراندار باشد. به عبارت دیگر دنباله $\{x_n\}$ کراندار است هرگاه عدد ثابت و مثبتی مانند M موجود باشد بطوریکه

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |x_n|\leq M$$

بطور مثال دنباله های $x_n=(-1)^n$ ، $x_n=\frac{1}{n}$ ، $x_n=\sin(n\pi)$ کراندار هستند زیرا برد آنها کراندار است

مثال: کراندار بودن دنباله $a_n=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$ را بررسی نمائید

حل:

$$-1<\frac{-1}{(n+1)^2}<0 \Rightarrow 0<1-\frac{1}{(n+1)^2}<1 \Rightarrow 0<a_n<1$$

دنباله a_n کراندار است

Subject: ۴

قضیه: احکام زیر در فضای متریک (X,d) برقرار است

۱) دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x است اگر و تنها اگر هر همسایگی x شامل تمام اعضای $\{x_n\}$ بجز تعداد متناهی باشد

۲) حد هر دنباله در فضای متریک منحصر بفرد است

۳) هر دنباله همگرا، کراندار است (اما عکس آن درست نیست)

۴) x نقطه حدی E است اگر و تنها اگر دنباله $\{x_n\}$ از E موجود باشد که

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad , \quad x_n \neq x$$

۵) $x \in \overline{E}$ اگر و تنها اگر دنباله $\{x_n\}$ از E موجود باشد بطوریکه

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

برهان:

۱) فرض می‌کنیم $x_n \to x$ و همسایگی $N_r(x)$ را در نظر می‌گیریم، در تعریف قرار میدهیم $\varepsilon = r$ آنگاه:

$$\exists N \quad \forall n \,(n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < r)$$

یعنی اینکه:

$$\forall n \geq N \,, \quad x_n \in N_r(x)$$

برعکس فرض می‌کنیم هر همسایگی x شامل تمام نقاط بجز تعداد متناهی نقطه باشد. نشان میدهیم $x_n \to x$. به ازای $\varepsilon > 0$ همسایگی $N_\varepsilon(x)$ را در نظر می‌گیریم، قرار میدهیم:

$$N = \max\{n \mid x_n \notin N_\varepsilon(x)\} + 1$$

Subject: ۵

چون مجموعه $\{n \mid x_n \notin N_\varepsilon(x)\}$ یک مجموعه متناهی است پس دارای ماکزیمم است که آنرا $N-1$ درنظر می‌گیریم، حال اگر $n \geq N$ باشد آنگاه:

$x_n \notin \{n \mid x_n \notin N_\varepsilon(x)\}$ و از $x_n \in N_\varepsilon(x)$ نتیجه می‌گیریم $d(x_n, x) < \varepsilon$

یعنی $x_n \longrightarrow x$

۲) فرض می‌کنیم $x_n \longrightarrow x$ و $x_n \longrightarrow y$ بطوریکه $x \neq y$، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ داریم:

$$x_n \to x \Rightarrow \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(I)}$$

$$x_n \to y \Rightarrow \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \Rightarrow d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(II)}$$

قرار می‌دهیم $N = \max\{N_1, N_2\}$، آنگاه گزاره‌های I و II هم برای $n \geq N$ برقرار هستند و لذا داریم:

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

و این رابطه به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است پس $d(x,y) = 0$ یعنی $x = y$

۳) فرض می‌کنیم $\varepsilon = 1$ و $x_n \longrightarrow x$ بنابراین:

$$\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < 1 \quad \text{یا} \quad x_n \in N_1(x)$$

قرار می‌دهیم $M = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \ldots, d(x_N, x)\} + 1$ در این صورت داریم:

$d(x_n, x) < M$ یا $\forall n : x_n \in N_M(x)$