حد و پیوستگی توابع

مناسب برای دانشجویان تمامی رشته‌ها

به همراه مسائل حل شده

استاد محمد برزور
سایت ریاضیات ایران

فهرست مطالب

به نام خدا

این فایل به کوشش استاد محمد برزور تهیه شده است. به پاس قدردانی از زحماتی که ایشان برای تهیه این فایل متحمل شده‌اند، لطفا از انتشار آن خودداری نموده و به دوستان خود سفارش کنید کتاب را از سایت ریاضیات ایران تهیه نمایند.

برای تهیه سایر جزوات و کتاب‌های استاد برزور به سایت ریاضیات ایران به آدرس https://irmath.com مراجعه نمایید.

لطفا اشکالات احتمالی فایل یا نظرات و پیشنهادات ارزشمند خود را به ایمیل سایت ریاضیات ایران به نشانی info@irmath.com با ما در میان بگذارید و یا با شماره سایت (09190248160) تماس حاصل فرمایید.

با سپاس از همراهی شما

محمد برزور

سایت ریاضیات ایران

حد و پیوستگی توابع

در این کتاب ابتدا با مفهوم حد تابع آشنا می‌شویم. حد توابع یکی از مفاهیم مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال است. زیرا پایه و اساس مفاهیم پیوستگی، مشتق و انتگرال توابع بر آن استوار است. سپس مفهوم پیوستگی توابع را بررسی می‌کنیم.

بخش 1- مفهوم همسایگی

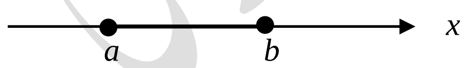
تعریف1-1:

الف ـ مجموعه $\{x|\ a < x < b\ , x \in \mathbb{R}\}$ را که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$ یک بازه باز می‌نامیم و با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم.

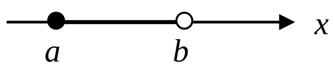
محور اعداد حقیقی

ب ـ مجموعه $\{x|\ a \le x \le b\ , x \in \mathbb{R}\}$ را که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \le b$ یک بازه بسته می‌نامیم و با نماد $[a, b]$ نمایش می‌دهیم.

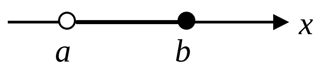
محور اعداد حقیقی



پ ـ هریک از مجموعه‌های $\{x|\ a < x \le b\ , x \in \mathbb{R}\}$ و $\{x|\ a \le x < b\ , x \in \mathbb{R}\}$ را که در آنها $a < b$ و $a, b \in \mathbb{R}$ یک فاصله نیمه باز (نیمه بسته) می‌نامیم مجموعه اول را با نماد $(a, b]$ و مجموعه دوم را با نماد $[a, b)$ نمایش می‌دهیم.



$[a, b)$



$(a, b]$

تعریف2-1 : قدرمطلق هر عدد حقیقی x عددی است نامنفی که آنرا با $|x|$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

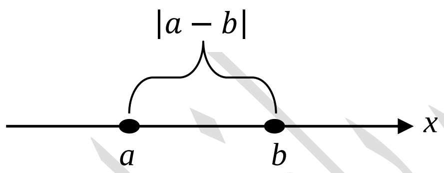
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

واضح است که $|x| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$. بعبارت دیگر شرط لازم و کافی برای آنکه $|x| > 0$ باشد اینست که $x \neq 0$.

به تعبیر هندسی: $|x|$ فاصله عدد x تا مبدأ می‌باشد که برحسب تعریف غیرمنفی است.

$$|x| = |x - 0| = |0 - x|$$

به همین ترتیب اگر $a, b \in \mathbb{R}$ آنگاه $|a - b|$ عبارت است از فاصله دو نقطه a و b از یکدیگر.



قضیه3-1 : اگر $x \in \mathbb{R}$ و $a, b \in \mathbb{R}$ ، آنگاه روابط زیر درست است.

1. $|x| = |-x|$
2. $|a - b| = |b - a|$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$

اثبات:

1 ـ فرض می‌کنیم $x > 0$ ، در این صورت $-x < 0$ و داریم:

$$|x| = x \quad , \quad |-x| = -(-x) = x$$

و اگر $x < 0$ آنگاه $-x > 0$ و داریم:

$$|x| = -x \quad , \quad |-x| = -x$$

پس در هر حال $|x| = |-x|$.

2 ـ مطابق بند 1 داریم:

$$|a - b| = |-(a - b)| = |b - a|$$

3 ـ اگر $x \geq 0$ آنگاه داریم:

$$-|x| \leq 0 \leq x = |x|$$

اگر $x < 0$ آنگاه داریم:

$$-|x| = x < 0 < |x|$$

بنابراین در هر حالت :

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

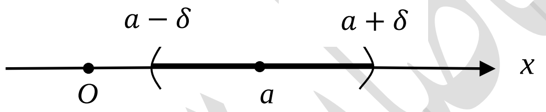
مثال 1 : فرض می‌کنیم $\delta \in \mathbb{R}$ [1] و $\delta > 0$ در اینصورت $|x| < \delta$ است اگر و فقط اگر $-\delta < x < \delta$.

حل: فرض می‌کنیم $|x| \leq \delta$. آنگاه چون $-|x| \leq x \leq |x|$ و چون $|x| \leq \delta$ در نتیجه $-\delta \leq -|x|$ بنابراین داریم:

$$-\delta \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq \delta \quad \text{ویا} \quad -\delta \leq x \leq \delta$$

بالعکس فرض می‌کنیم $-\delta \leq x \leq \delta$. اگر $x \geq 0$ آنگاه $|x| = x \leq \delta$ و اگر $x < 0$ آنگاه $|x| = -x < \delta$ خواهد بود زیرا بنابر فرض $-\delta < x$ یعنی $-x < \delta$. پس در هر صورت $|x| < \delta$ خواهد بود.

تعریف1-4 : اعداد حقیقی a و $\delta > 0$ را در نظر می‌گیریم، مجموعه جوابهای نامعادله $|x - a| < \delta$ را یک همسایگی از a به شعاع δ می‌نامیم.



این همسایگی را با نماد $N(a, \delta)$ نشان می‌دهیم، پس داریم:

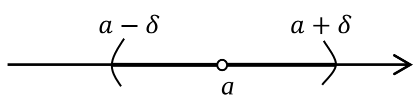
$$N(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$N(a, \delta) = (a - \delta \, , a + \delta)$$

تعریف1-5 : اعداد حقیقی a و δ را در نظر می‌گیریم، مجموعه $N(a, \delta) - \{a\}$ را یک همسایگی محذوف (سفته) نقطه a به شعاع δ می‌نامیم، این مجموعه را با علامت $N'(a, \delta)$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$N'(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta \ , x \neq a\} = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$



---

[1] – بخوانید: دلتا